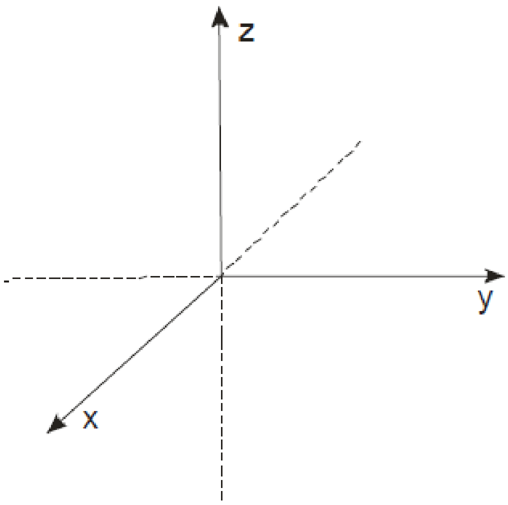
VEKTORI U PROSTORU I SKALARNI PROIZVOD

Pogledajmo najpre kako nastaje Dekartov pravougli trijedar.

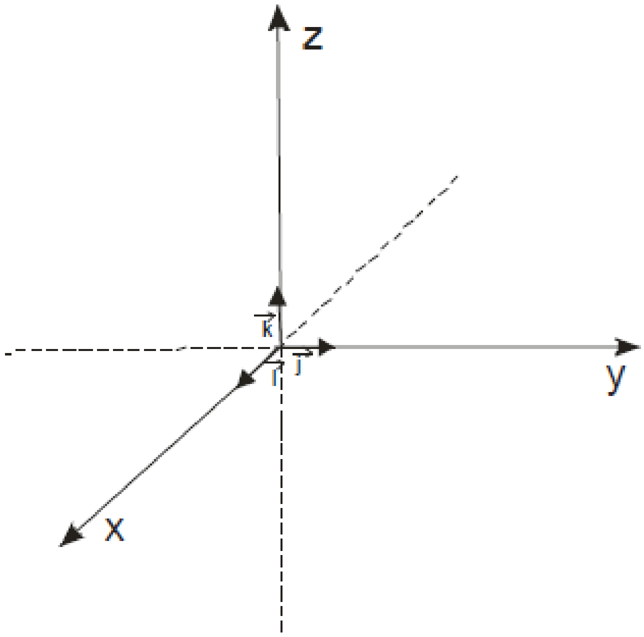
Kroz jednu tačku O postavimo tri numeričke prave (brojne ose) normalne jedna na drugu.



x-osa → Apscisna osa
y-osa → Ordinatna osa
z-osa → Aplikatna osa
Tačka O → kordinatni početak

Po dve koordinatne ose čine koordinatne ravni (xOy, xOz i yOz) normalne jedna na drugu.

Na x,y i z osi uočimo jedinične vektore (ortove) $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$



$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Svaki vektor $\vec{a}$ u prostoru predstavljamo:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \qquad \text{ili}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \text{uredjena trojka}$$

Intezitet vektora $\vec{a}$ je $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Jedinični vektor vektora a je vektor $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$

Ako imamo dve tačke A i B u prostoru, vektor $\vec{AB}$ se pravi:

$$A(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

SKALARNI PROIZVOD

Za razliku od skalara, koji za proizvod uvek imaju skalar, kod vektora postoje dve različite operacije množenja vektora, skalarni i vektorski proizvod.

Skalarnim proizvodom dva vektora nazivamo vektorsku operaciju kojom se od dva vektora kao rezultat dobija skalar. Skalarni proizvod dva vektora se označava tačkom (·), kao i proizvod dva skalara.

Skalarni proizvod dva vektora se izračunava tako što se saberu proizvodi svih njihovih respektivnih parova koordinata, odnosno

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Pored izračunavanja primenom koordinata, skalarni proizvod je moguće izračunati i ako se poznaju intenziteti vektora i ugao koji zaklapaju:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha ,$$

gde je sa $(\vec{a}, \vec{b})$, odnosno α, označen ugao koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Često se prethodna formula koristi za određivanje ugla koji zaklapaju dva vektora ako su poznate koordinate tih vektora:

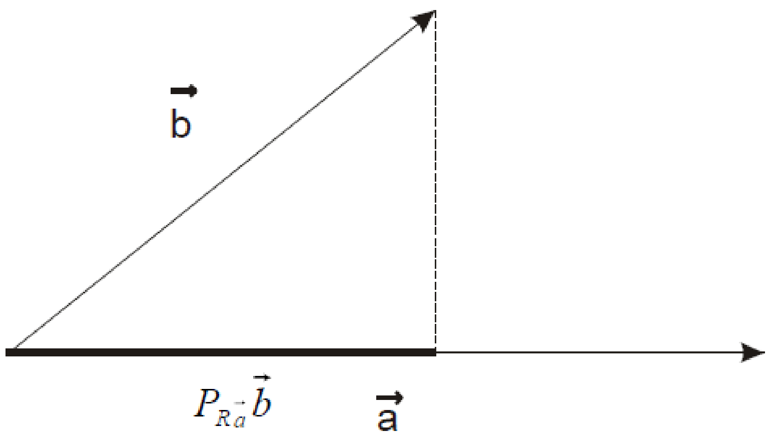
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

Skalarni proizvod ima sledeće osobine koje ga, pored tipa rezultata, razlikuju od vektorskog proizvoda:

1. Skalarni proizvod je komutativna operacija, odnosno, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, što je posledica činjenice da je $\cos \alpha = \cos (-\alpha)$.
2. Skalarni proizvod je jednak nuli kada su vektori uzajamno normalni, jer je $\cos (90^0) = 0$, a najveću vrednost ima kada su vektori paralelni, jer je $\cos (0^0) = 1$.

Projekcija vektora : $P_{R_{\vec{a}}}\vec{b}$ je projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$ i obrnuto :

$P_{R_{\vec{b}}}\vec{a}$ je projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$



$$P_{R_{\vec{a}}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|} \qquad \text{i} \qquad P_{R_{\vec{b}}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

PRIMER 1

Odrediti skalarni proizvod vektora:

$$\vec{a}=(4,-3,1)$$

$$\vec{b}=(5,-2,-3)$$

Rešenje:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,-3,1)\cdot(5,-2,-3)$$

$$=20+6+(-3)=23$$

PRIMER 2

Dati su vektori $\vec{a}=(1,-1,2)$ i $\vec{b}=(0,2,1)$. Odrediti ugao izmedju vektora $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$.

Rešenje:

$$\vec{a}=(1,-1,2)$$

$$\vec{b}=(0,2,1)$$

Nadjimo najpre vektore $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b}=(1,-1,2)+(0,2,1)=(1,1,3)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(1,-1,2)-(0,2,1)=(1,-3,1)$$

Radi lakšeg rada nazovimo: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{x}$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{y}$

Dakle: $\vec{x}=(1,1,3)$ i $\vec{y}=(1,-3,1)$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (1,1,3) \cdot (1,-3,1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\left|\vec{y}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Sad ovo ubacimo u formulu:

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|} = \frac{1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}}$$

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{11}$$

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos \frac{1}{11}$$

PRIMER 3

Odredi projekcije vektora $\vec{a}=(5,2,5)$ **na vektor** $\vec{b}=(2,-1,2)$

Rešenje: $\vec{a}=(5,2,5)$

$\vec{b}=(2,-1,2)$

$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=?$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(5,2,5)\cdot(2,-1,2)=10-2+10=18$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

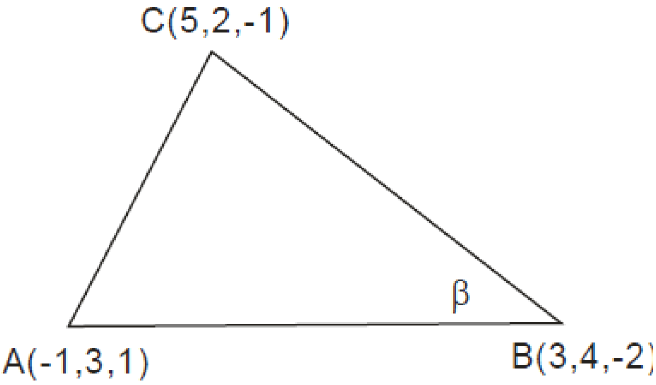
$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=\frac{18}{3}$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=6$$

PRIMER 4

Date su koordinate temena trougla ABC (A(-1,3,1),B(3,4,-2), C(5,2,-1)). Odrediti ugao ABC.

Rešenje:



Nadjimo najpre vektore $\vec{BA}$ i $\vec{BC}$

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\left|\vec{BA}\right|\cdot\left|\vec{BC}\right|}$$

$$\vec{BA} = (-1,3,1) - (3,4,-2) = (-4,-1,3)$$

$$\vec{BC} = (5,2,-1) - (3,4,-2) = (2,-2,1)$$

$$\left|\vec{BA}\right| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + 3^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$$\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = (-4,-1,3)\cdot(2,-2,1) = -8+2+3 = -3$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\left|\vec{BA}\right|\cdot\left|\vec{BC}\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{-3}{3\cdot\sqrt{26}}$$

$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

ZADACI ZA VEŽBANJE

Stojanović: 548-563
Vene: 494-511;529